ネットワークシステムにおけるコスト配分問題(不確実性を含むシステムにおける最適化手法)

成瀬, 喜則; 前田, 隆

数理解析研究所講究録
978 巻 1997 年 14-20

ネットワークシステムにおけるコスト配分問題

富山商船高等専門学校　成瀬喜則 (Yoshinori Naruse)
金沢大学経済学部　前田 隆 (Takashi Maeda)

(Abstract)
ネットワークを構築する際に発生する建設コストの配分問題について、各ネットワークが各種情報に対してそれぞれの効用関数を定義して、特性関数型の協力ゲームによるモデルについて検討を行った。さらに、Shapley 値による配分値と、平均費用価格法による配分値の一次結合で表されたコスト配分解を提案した。

1 はじめに

本稿では、ネットワーク間を接続するための建設コストや接続専用線の情報量に対する課金について考える。情報量に対する課金システムには、使用量にかかわらず一定の課金がなされる定額制と、使用量にしたがって課金がなされる従量制があるが、ここでは定額制の場合について検討を行う。

これらの費用を各ネットワークがどのように支払うべきかという問題については、費用分担問題の一つと考えることができる。

ネットワークを代表する値として、ユーザー数あるいはアドレス数, 端末の地理的分布, 発着対地間のトラフィック量, リソースの種類と容量, トラフィック特性, ネットワークトポロジー, ルーティング, 構成要素のコスト関数, サービス品質などがあげられ、これらの値を利用してゲームの問題として考えていくことにする。

さて、費用分担問題が、全体提携 N のもとでの費用配分の問題として、費用関数、または節約関数形の提携型ゲームとして与えられているときの費用配分方式には、いくつかの配分法がある [2, 3]。

費用分担問題では、配分の満たす基準を明確にすることが必要とされている。代表的な基準（公準）には、個人合理性、全体合理性、ダミプレイヤー排除性、戦略上同等性、対称性と無名性、無関連な代替案からの独立性、整合性・縮小ゲーム性、総体的単調性、提携の戦略上同等性、順序保存性、安定性が挙げられる。

本論では、Shapley 値による費用配分法と平均費用価格法を費用配分の解として取り上げ、それぞれの配分の持つ意味について述べ、それらの解を一次結合をして得られる新しい配分法を提案した。

又、各ネットワークが情報に対してどれだけの価値を見出すかを効用関数を用いて表した。これによって、ネットワーク同士が接続され、ある情報を共有できるようになった場合でも、ネットワークによって見出される金額的価値の違いも表現できるようになった。

また、ネットワークが構築されても、すべての情報を共有できるわけではないことも考慮にいれた。すなわち、各ネットワークそれ自身しか利用できない private information の存在を認めたこと、public information であってもなんらかの制限により 100 %利用できない状態がありうることを認めたこと、である。

以上の観点を特性関数を定義する上で取り入れ、Shapley 値、Nash 解を求め、さらに、平均費用価格法を取り入れた配分方法について議論を行う。

2　2つのネットワークのコスト配分問題

2.1　特性関数の定義

今、図1のように2つのネットワーク 1,2 が建設コスト c をかけて接続を行い、情報の共有化をはかるものとする。その際、c を各ネットワークがどのように負担しなければならないかを協力ゲームを用いて考える。

まず、ネットワークを表す情報の個数はm個で、各ネットワークは初期保有として、$q_i^i = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ の情報を所有しているものとする。ここで、a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ はネットワーク i の所有する k番目の情報の量を表す。これらの量はすべて非負である。

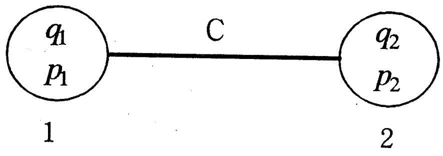

図1　リンクされた2つのネットワーク

次に、各ネットワーク i の情報ベクトルに対して持つ効用を $u_i(q_1^i, q_2^i, p_i)$ とする。これは、q_j というある情報を、その情報を保有するネットワーク jが利用する場合と、他のネットワーク kが利用する場合とで必ずしも一致しないことを想定している。その理由として、ある情報を他のネットワークが使う場合、ある制限によりその情報のすべてを利用することができないことがありうることが挙げられる。

さて、ネットワークがコスト c をかけてリンクしたとする。その時の特性関数は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
v(1) &= u_1(q_1^1, 0, p_1) \\
v(2) &= u_2(0, q_2^2, p_2) \\
v(12) &= u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) - c
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$v(1), v(2)$ は、それぞれのネットワークがリンクせず、単独で存在する場合を示しており、他のネットワークの情報を利用することができないために、その保有量は0である。また、$v(12)$ は、ネットワーク同士が提携をしてリンクをした状態を表している。ここでは、各ネットワークが各自の保有情報だけでなく、他のネットワークの保有情報をも利用できるようになっている。ここで、p_iはネットワーク i の private information であり、他のネットワークと共有しない情報量である。また、$q_i^k \leq q_i^i$とし、各ネットワークは他のネットワークの情報量を最大限 q_i^iの範囲内で利用できるとする。

2.2 Shapley 値からみたコスト配分

Shapley 値は、あるゲームに参加しようとするとき、それぞれのプレイヤーにとってどれだけの利得が得られるかについての期待値を考えたもので、個人合理性、パレート最適性、ナルプレイヤーのゼロ評価、対称性、加法性を満足しており、配分を与える解として有効である [5]。一般に、ゼロ単調な提携ゲーム vが与えられたとき、プレイヤー i の Shapley 値は次のように定義される。

$$\phi_1 = \sum_{S \subset N} \gamma(S)[v(S) - v(S-i]$$

ただし、 $\gamma(S) = \frac{1}{n!}(s-1)!(n-s)!$
s は提携 Sのメンバーの数

又、$\phi(v) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ をゲーム vの Shapley 値という。２人ゲームの場合の Shapley 値は、提携ゲームとして $v(1), v(2), v(12)$ で与えられているとき、

$$\phi_1(v) = v(1) + \frac{1}{2}[v(12) - v(1) - v(2)]$$
$$\phi_2(v) = v(2) + \frac{1}{2}[v(12) - v(1) - v(2)]$$

で表される。特に、ゼロ正規化されたゲーム、すなわち $v'(1) = v'(2) = 0, v'(12) = v(12) - v(1) - v(2)$ の場合は、

$$\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}v'(12) \tag{2}$$

で表され、これらは戦略上同等なゲームである。一般に、Shpaley 値は個人合理性と全体合理性（パレート最適性）を満足している。

式（1）における Shapley 値をϕ_1, ϕ_2とすると

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= v(1) + \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)) \\
&= u_1(q_1^1, 0, p_1) + \frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) \\
&\quad -u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(0, q_2^2, p_2) - c) \\
\phi_2 &= v(2) + \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)) \\
&= u_2(0, q_2^2, p_2) + \frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) \\
&\quad -u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(0, q_2^2, p_2) - c) \qquad (3)
\end{aligned}$$

すなわち、Shapley 値は、各ネットワークにその基本的値とも言うべき $v(i)$ を保証し、残りを２つのネットワークで均等に配分した解（残余均等配分解）となっている。

さて、Shapley 値は個人合理性、およびパレート最適であるから配分になっており、各ネットワークのコスト配分解を x_1, x_2 とすると

$$\begin{aligned} u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) - x_1 &= \phi_1 \\ u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) - x_2 &= \phi_2 \end{aligned} \tag{4}$$

左辺はネットワークが建設された時の、獲得効用を表している。式 (3) , (4) より、

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) - u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) + u_2(0, q_2^2, p_2) + c) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(u_2(q_1^1, q_2^1, p_2) - u_2(0, q_2^2, p_2) - u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_1(q_1^1, 0, p_1) + c) \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。各ネットワークのコスト配分は次のように考えることができる。例えば、ネットワーク１の場合、建設コストの平均値$\frac{1}{2}c$ を基準にして、ネットワーク１の獲得情報量$\frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) - u_1(q_1^1, 0, p_1))$ の分だけ負担を増やし、ネットワーク２の獲得情報量 $\frac{1}{2}(u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) + u_2(0, q_2^2, p_2))$ だけ負担を軽減する。

2.3 Nash 解からみたコスト配分

交渉解として知られる Nash 解は、プレイヤー間の交渉の結果得られるもので、実現可能領域 R と基準点 c の組 (R, c) の上で行われる。特に、２人交渉問題について、Nash 解は個人合理性、パレート最適性、利得測定法からの独立性、対称性などの公準を満たすことが知られている。

Nash 解は、妥協点の近傍での交渉が重要な争点になるような問題について適切であると考えられる。Nash 解をプレイヤーに示せば、各プレイヤーはそれを参考にしながら交渉を進め、問題が Nash 解に適切な問題であれば、交渉は Nash 解の示すところで妥協すると考えられる [4]。

配分問題を Nash 解で評価を行う。

各ネットワークの利得を y_1, y_2 とすると、

$$\begin{aligned} y_1 - u_1(q_1^1, 0, p_1) \geq 0&, \\ y_2 - u_2(0, q_2^2, p_2) \geq 0&, \\ (y_1 - u_1(q_1^1, 0, p_1)) + (y_2 - u_2(0, q_2^2, p_2)) &= u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) \\ &\quad - u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(0, q_2^2, p_2) - c \end{aligned} \tag{6}$$

となり、式 (6) で $z_1 = y_1 - u_1(q_1^1, 0, p_1)$, $z_2 = y_2 - u_2(0, q_2^2, p_2)$ とおくと、基準点を $(z_1, z_2) = (0, 0)$ とし、パレート最適となる

$$z_1 + z_2 = u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) - u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(0, q_2^2, p_2) - c$$

を満足する点の中で $\prod_{i \in N} z_i$ を最大にする解は

$$z_1 = z_2 = \frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) + u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) - u_1(q_1^1, 0, p_1) - u_2(0, q_2^2, p_2) - c)$$

となり、y_1, y_2はShapley 値である式 (3) と一致する。

3　平均費用価格法の導入

前述したように、Shapley 値を利用して求めたコスト配分モデルでは、ネットワーク1にとって、相手のネットワーク2の規模、すなわち、$\frac{1}{2}(u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) - u_1(q_1^1, 0, p_1)))$ が大きいと考え、逆にネットワーク2がネットワーク1の規模 $(\frac{1}{2}(u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) + u_2(0, q_2^2, p_2)))$ が小さいと考えれば考えるほど、コスト配分が大きくなる。

すなわち、このモデルにおいては、相対的に規模の小さいネットワークほど利得が大きくなり、コスト負担が大きくなる。

さらに、各ネットワークが保有情報量をできるだけ大きく申告することによって、相手のネットワークに対する効用を相対的に小さくすることができる。また、逆に相手のネットワークが見いだす自分への保有情報に対する価値を大きくすることが可能である。これによって、コスト負担を小さくすることができるのである。

これは、河川整備計画問題で指摘されている、いわゆる「ただ乗り」問題と共通している。つまり、各企業が整備のために拠出する金額を申告（投票）する時に、どのような方式をとると、各企業の機会主義的な行動を封じうるかという話である。

本論では、一つの解決策として、もう一つのコスト配分解を提示し、これらの一次結合の配分解を考えることによって、各ネットワークの不満度を最小にすることを提案する。

次のような前提でコスト配分を考える。

「ネットワーク接続コストは自分の保有情報価値に比例して分担される。」

これは、平均費用価格法と呼ばれ、次式で表される。

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{u_1(q_1^1, 0, p_1)}{u_1(q_1^1, 0, p_1) + u_2(0, q_2^2, p_2)} c \\ x_2' &= \frac{u_2(0, q_2^2, p_2)}{u_1(q_1^1, 0, p_1) + u_2(0, q_2^2, p_2)} c \end{aligned} \tag{7}$$

この解 (x'_1, x'_2) は、式 (5) で表された、コスト配分解 (x_1, x_2) とは逆に、効用関数で表された保有情報に対する価値が小さいネットワークにとって有利になるコスト配分解である。

式 (5) で与えられたモデルにおける (x_1, x_2) は、ネットワーク接続によって獲得できる利得が多ければ多いほど、コスト配分が大きくなる。もし、保有情報に対する価値を過大申告し、他のネットワークの public information に対する価値を過小評価するような効用関数の場合、そのネットワークの負担すべきコストは低くなる。

また、式 (7) で与えられたモデルにおける (x'_1, x'_2) で与えられたモデルでは、逆に、保有情報に対する価値を過小申告し、他のネットワークの public information に対する価値を過大評価するような効用関数の場合、そのネットワークの負担すべきコストは低くなる。

そこで、この２つの解を１次結合した解 (X_1, X_2) を考える [1]。

$$\begin{aligned} X_1 &= (1-\alpha)x_1 + \alpha x'_1 \\ X_2 &= (1-\alpha)x_2 + \alpha x'_2 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし、$x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2 = c, 0 \leq \alpha \leq 1$

そこで

$$min(X_1 - x'_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 \tag{9}$$

となるαを求めることが必要となる。それは次のことを意味する。ネットワーク２の方が規模が大きいとすると、ネットワーク１はコスト解 (7) を要求するであろうし、ネットワーク２はコスト解 (5) を当然要求するであろう。したがって、各ネットワークの負担すべき解 X_1, X_2はそれぞれ x'_1, x_2にできるだけ近い値を得ようと努力するであろう。そこで、式 (9) となるようなαを求めることが必要となるのである。ただし、それぞれのコスト解はパレート最適性を満たしているが、個人合理性を満たしていることも要求される。それは次の条件である。

$$\begin{aligned} x_1 &\leq u_1(q_1^1, q_2^1, p_1) - u_1(q_1^1, 0, p_1) \\ x'_2 &\leq u_2(q_1^2, q_2^2, p_2) - u_2(0, q_2^2, p_2) \end{aligned} \tag{10}$$

さて、(9) に (5) , (7) , (8) を代入すると

$$(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)(x_1 - x'_1)^2 \tag{11}$$

となるから、$\alpha = \dfrac{1}{2}$ で最小値をとる。(図２)

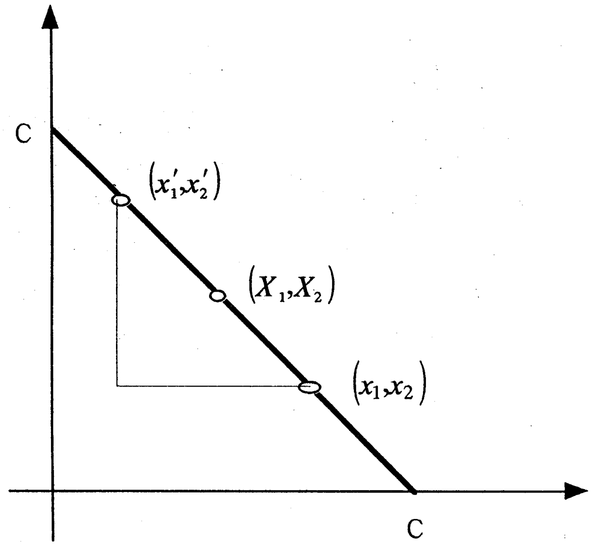

図２　コスト配分解の関係

参考文献

[1] Henriet,D.,and Moulin,H.:Traffic-based cost allocation in a network.RAND Journal of Economics,Vol.2.Summer 1996,pp.332-345

[2] Moulin,H.and S.Shenker:Average Cost Pricing versus Serial Cost Sharing:An Axiomatic Comparison.Journal of Economic Theory 64,(1994),pp178-201

[3] Sharkey.W.W.:Suggestions for a game-theoretic approach to public utility and cost allocation.The Bell Journal of Ecomonics,pp57-68

[4] 鈴木光男:新ゲーム理論,(1995),pp330-361, 勁草書房.

[5] 鈴木光男, 中村健二郎:社会システム,(1976),pp16-54, 共立出版.